Ingeniería de Telecomunicación

Primera evaluación: Números, desigualdades, funciones elementales.

1. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que

$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

2. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad siguiente.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

3. Calcula el rectángulo inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > 0, b > 0$, que tiene mayor área.

   Sugerencia. Usa la desigualdad de las medias.

4. Prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes igualdades.

   a) $\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$, $a \neq -1$. Definamos $\vartheta = 2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a+1}$. Prueba que $\cos\vartheta = a$, $\operatorname{sen}\vartheta = b$ [1].

6. Dado un número $x \neq 0$, calcula un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$. Dicho número, que es único, se llama *argumento cosecante hiperbólica* de x.

Entregar el lunes, día 23 de octubre, en clase de 11h-12h.

Granada, 16 de octubre de 2006

[1] Observa que ϑ es el argumento principal del número complejo $a + ib$